Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
рассказчику баек
и программы мехмата и НМУ
стильно и модно одетому, всегда и везде
и улыбчивому, как Степаньянц и Страупе
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: А вы читали когда-нибудь советские учебники? Про уравнение Дирака я узнал из школьного учебника истории. Ну, там был раздел «крупнейшие достижения науки»…

Предлагаю немного отдохнуть от тензоров и просто посмотреть, как преобразуются компоненты матрицы э/м поля при переходе в новую систему координат, движущуюся с бетой **β**. Если вдоль этой беты направить ось x, а ось y и z направить так, чтобы они образовывали правую тройку, то

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + \beta H'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - \beta H'_y)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \gamma(H'_y - \beta E_z), \quad H_z = \gamma(H'_z + \beta E_y)$$

В нерелятивистском случае можно считать $\gamma=1$, что лишь упрощает формулы.
А чтобы получить новые координаты через старые, нужно всего лишь поменять все плюсы на минусы:

$$E'_x = E_x, \qquad H'_x = H_x,$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Также существуют инварианты:
Первый: Скалярное произведение **E** и **H** одинаково во всех СК
Второй: $H^2$-$E^2$ также одинаково во всех СК. Иногда говорят, что инвариантом является $E^2$-$H^2$, но это по сути одно и то же.

Всю эту информацию я дал без вывода. Он будет в СТО8.

Пока порешаем задачи.

## ЗАДАЧА 13.3

В исходной СК вектора **E** и **H** образуют угол φ. Как нужно поменять СК, чтобы они стали коллинеарны?

**Авторская задача**. В исходной СК вектора **E** и **H** образуют угол φ. В новой СК они коллинеарны. А чему равны модули напряжённостей (электрической и магнитной) там?

Начнём с решения авторской задачи, потому что она проще. Для неё нам вообще не потребуются преобразования выше, а потребуется лишь инварианты. Пусть в исходной были 3-векторы **E и H,** а их модули E и H. Тогда (**E,H**)=EHcosφ.

$$(E', H') = (E, H) = EH\cos\varphi$$

$$H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2$$

Т.к. $E'$ и $H'$ должны быть по условию коллинеарны, то

$$(E', H') = E'H'$$

.

Получаем систему из двух уравнений относительно $E'$ и $H'$:

$$\begin{cases} E'H' = EH\cos\varphi \\ H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2 \end{cases}$$

Решим её. Для этого разделим переменные, подставив во второе уравнение по очереди то $E'$ и $H'$:

$$\begin{cases} H'^2 - \left[\dfrac{EH\cos\varphi}{H'}\right]^2 = H^2 - E^2 \\ \left(\dfrac{EH\cos\varphi}{E'}\right)^2 - E'^2 = H^2 - E^2 \end{cases}$$

Получаем два биквадратных уравнения.

$$\begin{cases} H'^4 - (H^2 - E^2)H'^2 - EH\cos\varphi = 0 \\ E'^4 + (H^2 - E^2)E'^2 - EH\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Дискриминант в обоих уравнениях один и тот же.

$$D = (H^2 - E^2]^2 + 4EH\cos\varphi$$

Легко видеть, что он всегда >=0, поэтому

$$H'^2 = \frac{H^2 - E^2 \pm \sqrt{(H^2 - E^2]^2 + 4EH\cos\varphi}}{2}$$

$$E'^2 = \frac{E^2 - H^2 \pm \sqrt{(H^2 - E^2]^2 + 4EH\cos\varphi}}{2}$$

Знаки + и – перед радикалами должны быть у $E'$ и $H'$ согласованными и одними и те же, чтобы выполнялось $H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2$.

Ну что, ощутили мощь инвариантов?

Теперь переходим к 13.3. Я расскажу два решения – решение Соколова и то, которое в Ландау-Лифшице. Начнём с первого.

Преобразования Лоренца можно записать в векторном виде

$$E=\gamma\left(E'+[H'\times\beta]\right),\quad H=\gamma\left(H'-[E'\times\beta]\right)$$

И всё раскладывать на параллельную к бете компоненту и перпендикулярно ей.

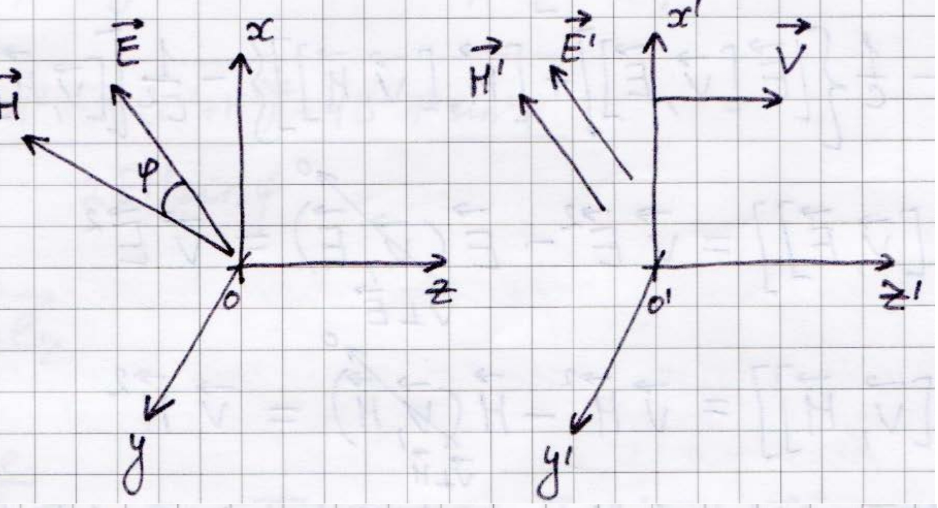
13.3

$\vec{E}, \vec{H}$

$\varphi$

$\vec{E}' \parallel \vec{H}'$

$\vec{V}$ – ?




Обозначим $\parallel \to \parallel \vec{V}$, $\perp \to \perp \vec{V}$

$\vec{E}_\parallel = 0$, $\vec{H}_\parallel = 0$

$\vec{E} = \vec{E}_\perp$, $\vec{H} = \vec{H}_\perp$

Кроме того

$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel = 0$, $\vec{H}'_\parallel = \vec{H}_\parallel = 0$

Поэтому

$\vec{E}' = \vec{E}'_\perp$, $\vec{H}' = \vec{H}'_\perp$

Пояснение: имеется в виду, что и начальные **E и H**, и конечные $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ перпендикулярны скорости **v** перехода от одной СК к другой. Почему так? Соколов так решил. В частности, наша цель – найти ***хотя бы одну*** новую СК, где $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ будут коллинеарны. Оказывается, что для этого скорость перехода в плоскости **E и H** нам не нужна.

$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{H}'_{\perp} = \vec{H}' = \frac{\vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

А теперь то, что нам нужно: $[\vec{E}', \vec{H}'] = 0$ - конечные два векторы должны быть коллинеарны!

Подставляем $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ из предыдущих двух формул в векторное произведение:

$$\left[\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}],\ \vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}]\right] = 0$$

Далее следует обширные выкладки, которые в состоянии проделать даже первокур в качестве отработки ангема: просто раскрытие всех скобочек векторного произведения:

$$[\vec{E},\vec{H}] - \frac{1}{c}\left\{[\vec{E}[\vec{v},\vec{E}]] + [\vec{H},[\vec{v},\vec{H}]]\right\} - \frac{1}{c^2}\left[[\vec{v},\vec{H}],[\vec{v},\vec{E}]\right] = 0$$

1) $$[\vec{E},[\vec{v},\vec{E}]] = \vec{v}\,\vec{E}^2 - \vec{E}\,\underset{\vec{v}\perp\vec{E}}{\cancelto{0}{(\vec{v},\vec{E})}} = \vec{v}\,\vec{E}^2$$

$$[\vec{H},[\vec{v},\vec{H}]] = \vec{v}\,\vec{H}^2 - \vec{H}\,\underset{\vec{v}\perp\vec{H}}{\cancelto{0}{(\vec{v},\vec{H})}} = \vec{v}\,\vec{H}^2$$

2) $$[\underset{\vec{a}}{[\vec{v},\vec{H}]},[\underset{\vec{b}}{\vec{v}},\underset{\vec{c}}{\vec{E}}]] = \vec{v}([\vec{v},\vec{H}],\vec{E}) - \vec{E}\,\cancelto{0}{(\vec{v},\underbrace{[\vec{v},\vec{H}]}_{\perp\vec{v}})} =$$

$$= -\vec{v}\,(\vec{v},[\vec{E},\vec{H}])$$

Тогда:

$$[\vec{E},\vec{H}] - \frac{\vec{v}}{c}\left\{\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right\} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v},[\vec{E},\vec{H}]) = 0$$

Пусть $\vec{v}$ направлена вдоль $[\vec{E},\vec{H}]$.

$$[\vec{E},\vec{H}] \to EH\sin\varphi, \quad \frac{\vec{v}}{c} \to \frac{v}{c} = \beta$$

Последние две строчки нуждаются в комментарии. Соколов решает искать искомую СК в ещё более частном случае: как коллинеарную векторному произведению **E** и **H**.

Поэтому:

$$EH\sin\varphi - \beta(E^2+H^2) + \beta^2 EH\sin\varphi = 0$$

$$\beta_{1,2} = \frac{E^2+H^2 \pm \sqrt{(E^2+H^2)^2 - 4E^2H^2\sin^2\varphi}}{2EH\sin\varphi}$$

При $\varphi \to 0$, получим:

$$\beta_{1,2} = \frac{E^2+H^2 \pm \left(E^2+H^2 - \frac{2E^2H^2\sin^2\varphi}{E^2+H^2}\right)}{2EH\sin\varphi}$$

При выборе знака „–", $\beta \to 0$ при $\varphi \to 0$

Достаточно интересная ситуация сложилась: у нас получилось два корня, две возможности. Но бета с минусом лучше тем, что при φ->0 β также ->0. Это логично: если вектора уже ***почти*** коллинеарны, то и СК нам надо сместить ***на чуть-чуть***. Поэтому ауэ ансэ будет

Тогда

$$\beta = \frac{E^2+H^2 - \sqrt{(E^2+H^2)^2 - 4E^2H^2\sin^2\varphi}}{2EH\sin\varphi}$$

$$\vec{V} = \beta c \vec{e}_z$$

Вот такая вот задача.

А что у Ландавшица? А у него всё просто.
Проведём ось x перпендикулярно плоскости **E** и **H**. Будем искать новую СК, где у беты будет только иксовая компонента. Тогда достаём наши формулы

$$E'_x = E_x, \qquad H'_x = H_x,$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

И пишем условие коллинеарности $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ как равенство скалярного произведения произведению длин векторов. Особенно приятен тот факт, что раз начальные иксовые компоненты **E** и **H** были нулевыми, то и конечные также будут нулевыми (см. преобразования).

Так что равенство квадрата скалярного произведения произведению квадратов длин запишется как

$$(E'_y H'_y + E'_z H'_z)^2 = (E'_y + E'_z)^2 (H'_y + H'_z)^2$$

И уже сюда подставить преобразования Лоренца. Подстановка предлагается читателю ☺